第 2 节 综合小题（★★★★）

内容提要

本节主要涉及偏压轴难度的立体几何综合多选题，小伙伴们根据自身的实际情况来选择性学习. 在此之前，先学习空间角度的计算方法，作为铺垫，这一块（类型Ⅰ）难度不高.

1．线线角的计算：核心是通过平移使其相交，到三角形中来算.

2．线面角的计算：有两种几何的方法.

①作垂线：如图 1，要求直线 PA 与平面 α 所成的角，只需过 P 作 α 的垂线，找到垂足 O，求 $\angle PAO$.

②算距离：如图 2，若不方便过 P 作平面 α 的垂线，也可用等体积法或其它方法求出点 P 到平面 α 的距离 d，再按 $\sin\theta=\dfrac{d}{PA}$ 来求线面角.

3．二面角的计算：核心是作平面角，若与棱垂直的射线好找，则直接作，否则如图 3，可先过 α 内的点 P 作 β 的垂线，找到垂足 A，再过 P 作 l 的垂线 PO，垂足为 O，则由三垂线定理知 $l\perp OA$，所以 $\angle POA$ 即为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，这种找二面角的方法叫做三垂线法，其中 PO 和 OA 的作法可交换.

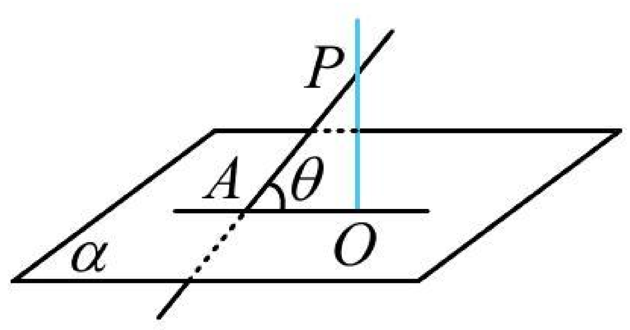


图1

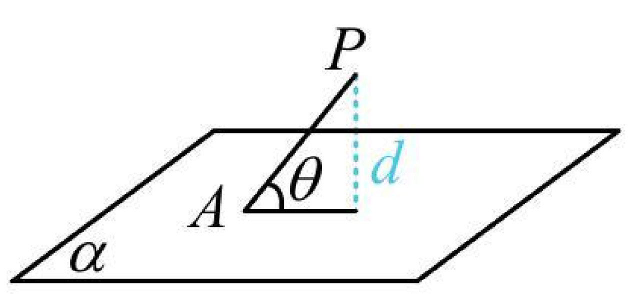


图2

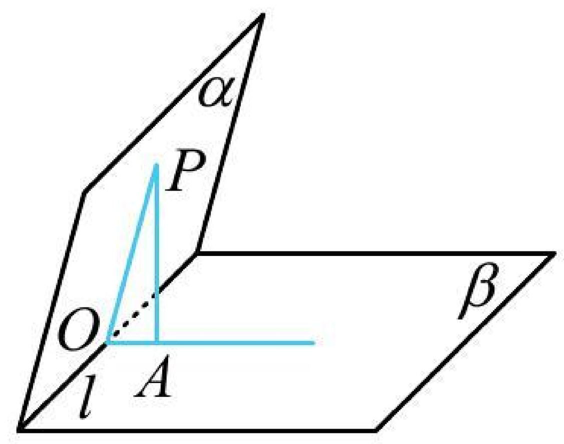


图3

4．综合多选题：这类题往往难度大，几何法、向量法都是可考虑的方向，具体问题具体分析.

典型例题

类型Ⅰ：空间角的计算综合小题

【例 1】在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$\angle A_1AD=\angle A_1AB=60^\circ$，$AA_1=2$，则异面直线 AC 与 DC_1 所成角的余弦值为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{14}}{7}$　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　（C）$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　（D）$\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$

答案：D

解析：求异面直线所成的角，可通过平移使其相交，到三角形内来分析. 只需将 DC_1 移到点 A 处，

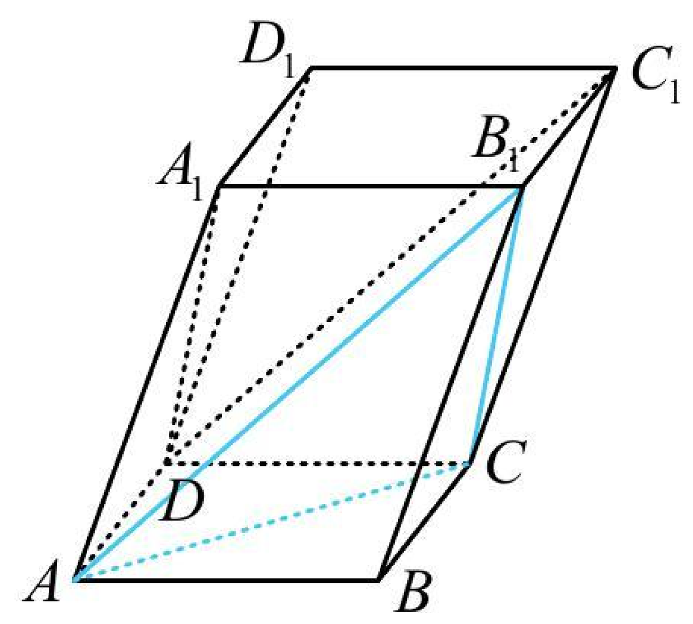
如图，$AB_1 // DC_1$，由题设可求得 $AC=\sqrt{2}$，$A_1D^2=AA_1^2+AD^2-2AA_1\cdot AD\cdot\cos\angle A_1AD=3$，

所以 $A_1D=\sqrt{3}$，故 $B_1C=\sqrt{3}$，$\angle A_1AB=60^\circ\Rightarrow\angle AA_1B_1=120^\circ$，

所以 $AB_1^2=AA_1^2+A_1B_1^2-2AA_1\cdot A_1B_1\cdot\cos\angle AA_1B_1=7$，故 $AB_1=\sqrt{7}$，

在 ΔAB_1C 中，由余弦定理，$\cos\angle B_1AC=\dfrac{AB_1^2+AC^2-B_1C^2}{2AB_1\cdot AC}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，

故异面直线 AC 与 DC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.



【反思】在求异面直线所成的角的小题中，常通过平移使它们成为相交直线，到三角形内进行分析.

【例 2】长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30°，则（　　）

（A） $AB=2AD$

（B） $AC=B_1C$

（C） B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

（D）AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°

答案：C

解析：长方体中有较多的线面垂直，故先分析题干所给的线面角，找到长、宽、高的关系，

$BB_1\perp$平面 $ABCD\Rightarrow B_1D$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle B_1DB$，

$AD\perp$平面 $AA_1B_1B\Rightarrow B_1D$ 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $\angle AB_1D$，由题意，$\angle B_1DB=\angle AB_1D=30^{\circ}$，

不妨设 $AA_1=1$，则 $\tan\angle B_1DB=\dfrac{BB_1}{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BD=\sqrt{3}$，设 $AB=a$，$AD=b$，则 $a^2+b^2=3$ ①，

$\tan\angle AB_1D=\dfrac{AD}{AB_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\dfrac{b}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ②，联立①②解得：$a=\sqrt{2}$，$b=1$，

A 项，$\begin{cases}AB=\sqrt{2}\\AD=1\end{cases}\Rightarrow AB=\sqrt{2}AD$，故 A 项错误；

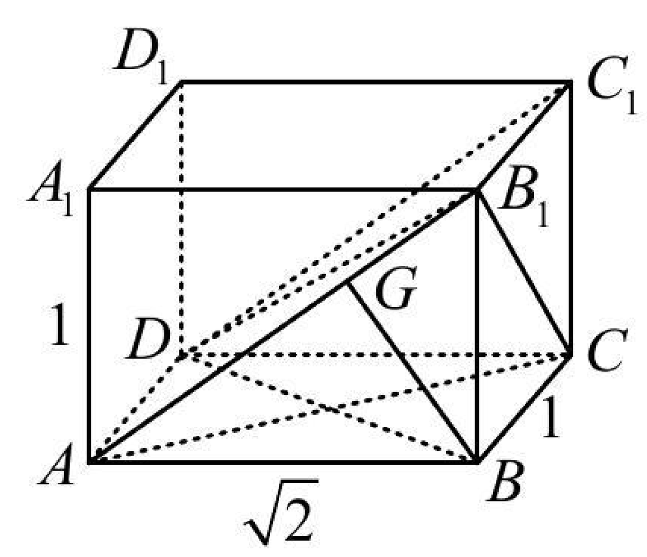
B 项，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3}$，$B_1C=\sqrt{BB_1^2+BC^2}=\sqrt{2}$，所以 $AC\neq B_1C$，故 B 项错误；

C 项，$DC\perp$平面 $BB_1C_1C\Rightarrow B_1D$ 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $\angle DB_1C$，$\tan\angle DB_1C=\dfrac{CD}{B_1C}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$，

所以 $\angle DB_1C=45^{\circ}$，故 C 项正确；

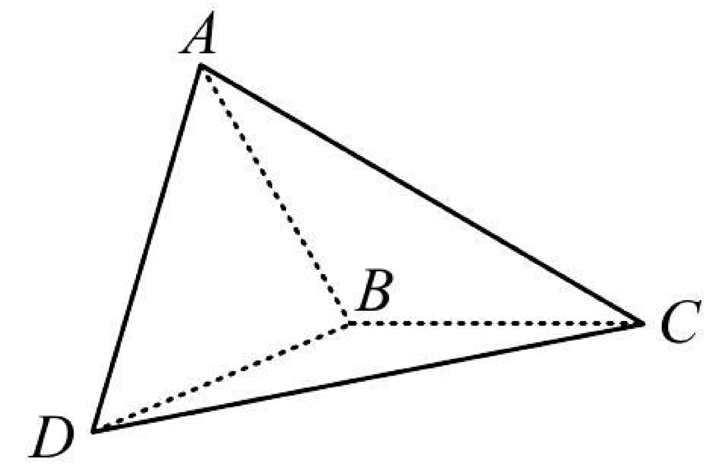
D 项，作 $BG\perp AB_1$ 于 G，因为 $AD\perp$面 ABB_1A_1，所以 $BG\perp AD$，从而 $BG\perp$平面 AB_1C_1D，

故 $\angle BAG$ 是 AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角，$\tan\angle BAG=\dfrac{BB_1}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle BAG\neq30^{\circ}$，故 D 项错误.



【反思】找线面角的核心是过直线上的点作面的垂线，找到垂足，也就找到了线面角.

【例 3】如图，已知ΔABC和ΔDBC所在的平面互相垂直，$AB=BC=BD$，$\angle ABC=\angle DBC=120^{\circ}$，则二面角$A-BD-C$的正切值等于_____.



答案：-2

解析：条件有面面垂直，可方便地作交线的垂线找到线面垂直，故用“三垂线法”作二面角的平面角，

如图，作$AH\perp CB$的延长线于 H，因为平面$ABC\perp$平面DBC，所以$AH\perp$平面DBC ①，

作$HI\perp BD$于点 I 交 CD 于点 G，又由①可得$BD\perp AH$，所以$BD\perp$平面 AHI，故$BD\perp AI$，

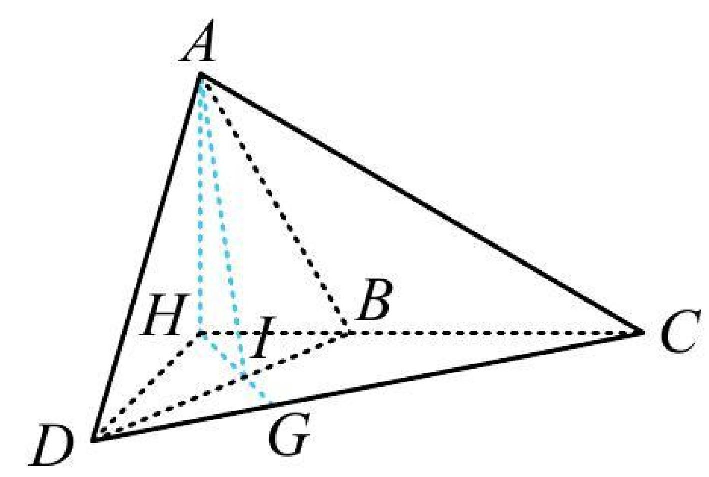
所以$\angle AIG$即为二面角$A-BD-C$的平面角，且$\angle AIG=\pi-\angle AIH$，

故$\tan\angle AIG=\tan(\pi-\angle AIH)=-\tan\angle AIH$ ②，要算$\tan\angle AIH$，只需到$Rt\Delta AHI$中计算 AH 和 HI，

由$\angle ABC=\angle DBC=120^{\circ}$知$\angle ABH=\angle DBH=60^{\circ}$，设$AB=BC=BD=2$，则$AH=AB\cdot\sin\angle ABH=\sqrt{3}$，

$BH=AB\cdot\cos\angle ABH=1$，在$\Delta HBI$中，$HI=BH\cdot\sin\angle HBI=1\times\sin 60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\tan\angle AIH=\dfrac{AH}{HI}=2$，代入②得$\tan\angle AIG=-2$，即二面角$A-BD-C$的正切值为$-2$.



【反思】作二面角的平面角常用“三垂线法”，只需过一个面内的点向另一个面作垂线，找到垂足，再过垂足作二面角棱的垂线，即可找到二面角的平面角.

类型Ⅱ：综合多选题

【例 4】（多选）在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点 P 在线段B_1C上运动，则下列结论正确的有（　　）

（A）直线$AC_1\perp$平面A_1BD

（B）三棱锥$P-A_1BD$的体积为定值

（C）异面直线 AP 与A_1D所成角的取值范围是$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$

（D）直线C_1P与平面A_1C_1D所成角的正弦值的最大值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

答案：ABD

解析：A 项，判断线面垂直，可找线线垂直，用三垂线定理法较方便，

如图 1，AC_1在面ABB_1A_1内的射影为AB_1，由三垂线定理，$A_1B\perp AB_1\Rightarrow A_1B\perp AC_1$，

同理，$BD \perp AC_1$，所以 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD，故 A 项正确；

B 项，如图 2，注意到 $B_1C \parallel A_1D$，所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD，故点 P 到平面 A_1BD 的距离为定值，又 ΔA_1BD 的面积不变，所以三棱锥 $P-A_1BD$ 的体积为定值，故 B 项正确；

C 项，注意到 $B_1C \parallel A_1D$，所以只需分析 AP 与 B_1C 所成的角，可到 ΔAB_1C 中来看，

如图 2，ΔAB_1C 为正三角形，当 P 在 B_1C 上运动时，AP 与 B_1C 所成的角的最小值为 $\angle AB_1C = \frac{\pi}{3}$，最大值为 $\frac{\pi}{2}$（$AP \perp B_1C$ 时），故 C 项错误；

D 项，P 是动点，不易过 P 作面 A_1C_1D 的垂线，建系处理也麻烦，故考虑公式 $\sin\theta = \frac{d}{PC_1}$，先求 d，

如图 3，$B_1C \parallel A_1D \Rightarrow B_1C \parallel$ 面 A_1C_1D，所以运动过程中，点 P 到面 A_1C_1D 的距离 d 是定值，

可按点 C 到面 A_1C_1D 的距离求 d，用等体积法，

$V_{A_1-CC_1D} = V_{C-A_1C_1D} \Rightarrow \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times d$，解得：$d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，

当 $PC_1 \perp B_1C$ 时，PC_1 最小，所以 $(PC_1)_{\min} = \sqrt{2}$，从而 $(\sin\theta)_{\max} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$，故 D 项正确.

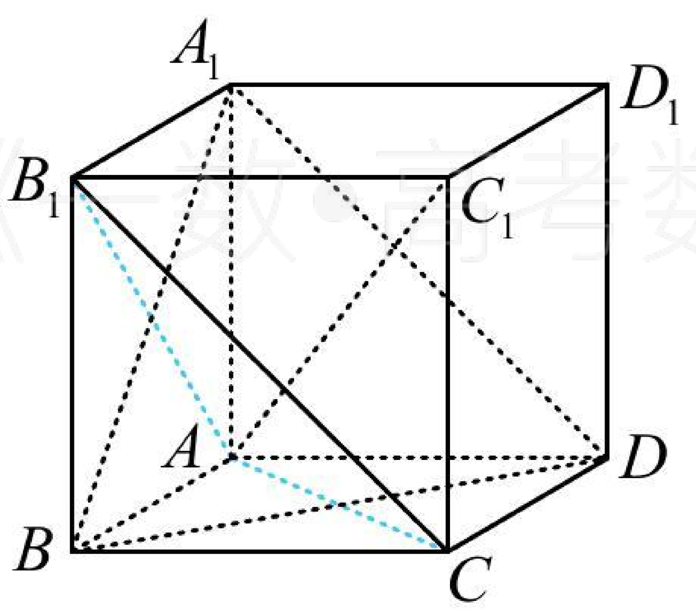


图1

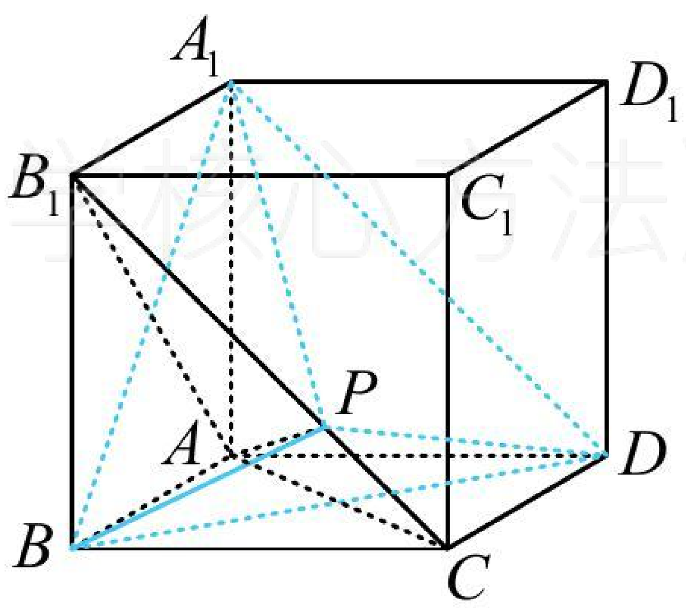


图2

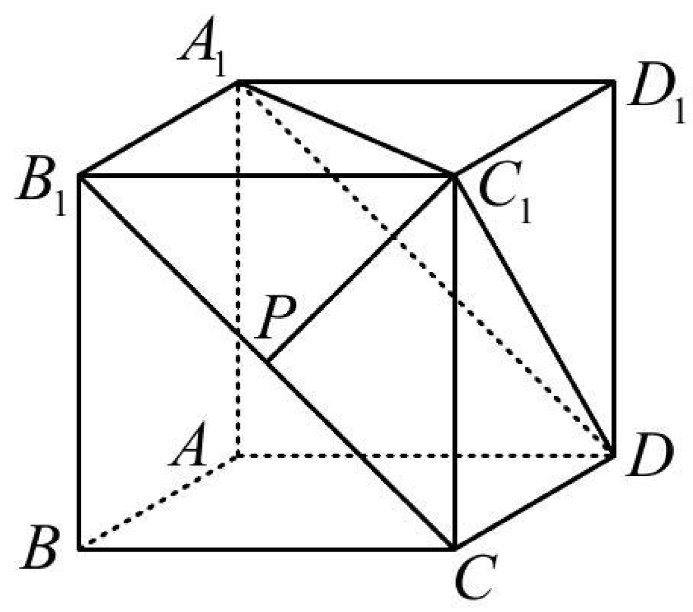


图3

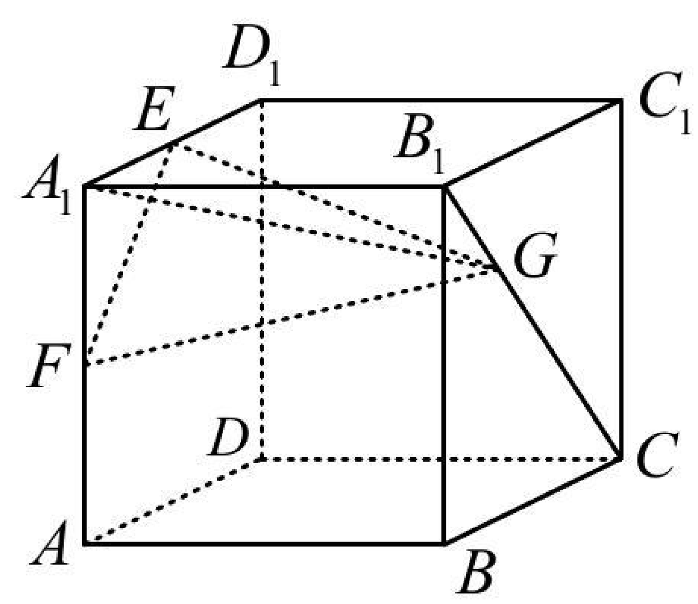
【例 5】（多选）如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 A_1D_1、AA_1 的中点，G 为面对角线 B_1C 上一个动点，则（　　）

（A）三棱锥 A_1-EFG 的体积为定值

（B）线段 B_1C 上存在点 G，使平面 $EFG \parallel$ 平面 BDC_1

（C）设直线 FG 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ，则 $\cos\theta$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$

（D）三棱锥 A_1-EFG 的外接球半径的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$



答案：ACD

解析：A 项，因为 B_1C // 面 A_1EF，所以点 G 到面 A_1EF 的距离不变，

又 ΔA_1EF 的面积也不变，所以三棱锥 A_1-EFG 的体积为定值，故 A 项正确；

B 项，如图 1，注意到 EF // BC_1，所以面 EFG // 面 $BDC_1 \Leftrightarrow EG$ // 面 BDC_1，

直接观察不易看出上述平行关系能否成立，可建系处理，如图建系，设 $\overrightarrow{B_1G}=\lambda\overrightarrow{B_1C}(0\le\lambda\le1)$，

由图可知，$D(0,0,0)$，$E(1,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，$B(2,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，

所以 $\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,2,2)$，设平面 BDC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=2y+2z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=-1\\ z=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$ 是平面 BDC_1 的一个法向量，

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB_1}+\overrightarrow{B_1G}=\overrightarrow{EB_1}+\lambda\overrightarrow{B_1C}=(1,2,0)+\lambda(-2,0,-2)=(1-2\lambda,2,-2\lambda)$，

令 $\overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{n}=1-2\lambda-2-2\lambda=0$ 得：$\lambda=-\dfrac{1}{4}$，不满足 $0\le\lambda\le1$，

所以不存在点 G，使平面 EFG // 平面 BDC_1，故 B 项错误；

C 项，可以用几何法作出线面角来分析，但平面 BCC_1B_1 的法向量能直接看出，故用向量法也好做，下面我们用向量法来求解. 由于 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$，所以当 $\sin\theta$ 最大时，$\cos\theta$ 最小，

因为 $F(2,0,1)$，所以 $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FB_1}+\overrightarrow{B_1G}=\overrightarrow{FB_1}+\lambda\overrightarrow{B_1C}=(0,2,1)+\lambda(-2,0,-2)=(-2\lambda,2,1-2\lambda)$，

如图 1，$\boldsymbol{m}=(0,1,0)$ 是面 BCC_1B_1 的一个法向量，故 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{FG},\boldsymbol{m}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{FG}\cdot\boldsymbol{m}\right|}{\left|\overrightarrow{FG}\right|\cdot\left|\boldsymbol{m}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{8\lambda^2-4\lambda+5}}$，

当 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ 时，$\sin\theta$ 取得最大值 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $(\cos\theta)_{\min}=\sqrt{1-(\dfrac{2\sqrt{2}}{3})^2}=\dfrac{1}{3}$，故 C 项正确；

D 项，如图 2，观察发现三棱锥 A_1-GEF 的外接球没有模型可套用，但 ΔA_1EF 为直角三角形，其外心比较好找，故过外心作面 A_1EF 的垂线，则球心必在该垂线上，

如图 2，取 EF 中点 H，过 H 作面 A_1EF 的垂线，因为 $H(\dfrac{3}{2},0,\dfrac{3}{2})$，所以可设球心为 $O(\dfrac{3}{2},m,\dfrac{3}{2})$，

要求 m，需建立方程，可根据 $OE=OG$，用空间两点距离公式来建立，

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1G}=\overrightarrow{OB_1}+\lambda\overrightarrow{B_1C}=(\dfrac{1}{2},2-m,\dfrac{1}{2})+\lambda(-2,0,-2)=(\dfrac{1}{2}-2\lambda,2-m,\dfrac{1}{2}-2\lambda)$，

由 $OE=OG$ 可得 $\sqrt{(\dfrac{3}{2}-1)^2+(m-0)^2+(\dfrac{3}{2}-2)^2}=\sqrt{(\dfrac{1}{2}-2\lambda)^2+(2-m)^2+(\dfrac{1}{2}-2\lambda)^2}$，

整理得：$m=2\lambda^2-\lambda+1$，所以 $OE=\sqrt{m^2+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{(2\lambda^2-\lambda+1)^2+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{[2(\lambda-\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{7}{8}]^2+\dfrac{1}{2}}$，

故当 $\lambda=1$ 时，OE 取得最大值 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，即所求外接球半径的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故 D 项正确.

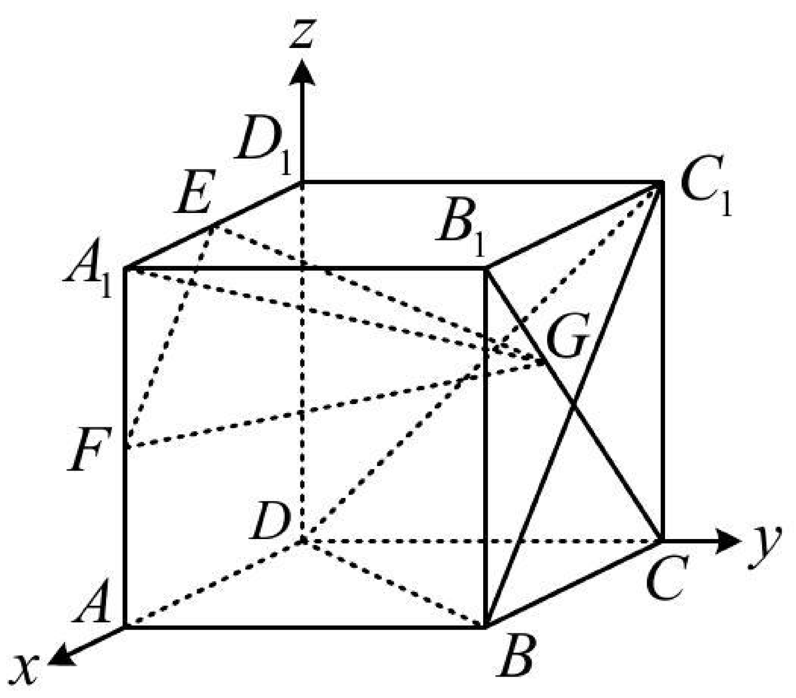


图1

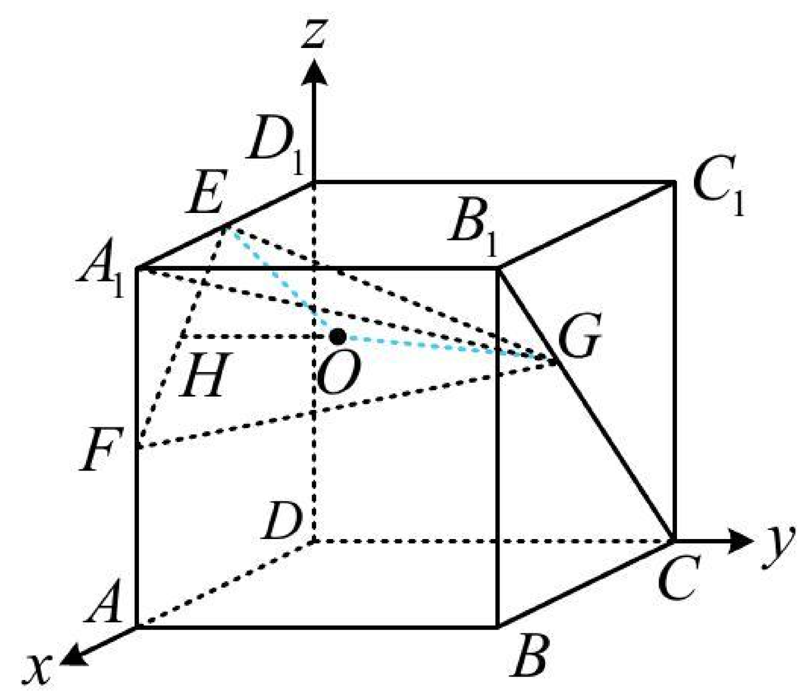


图2

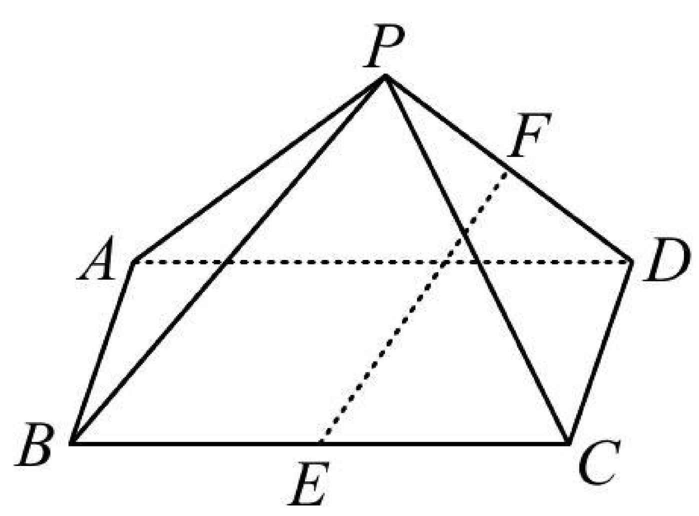
【总结】立体几何综合题变化多且难度大，一般优先考虑几何法，如无思路再尝试建系，建系前应评估计算量，以免计算过于复杂. 立体几何综合题类型繁杂，本节练习题部分有更多类型供大家训练.

强化训练

类型 I：空间角的计算

1.（2023·忻州模拟·★★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是矩形，$PA=\sqrt{2}AB$，E，F 分别是棱 BC，PD 的中点，则异面直线 EF 与 AB 所成角的余弦值是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

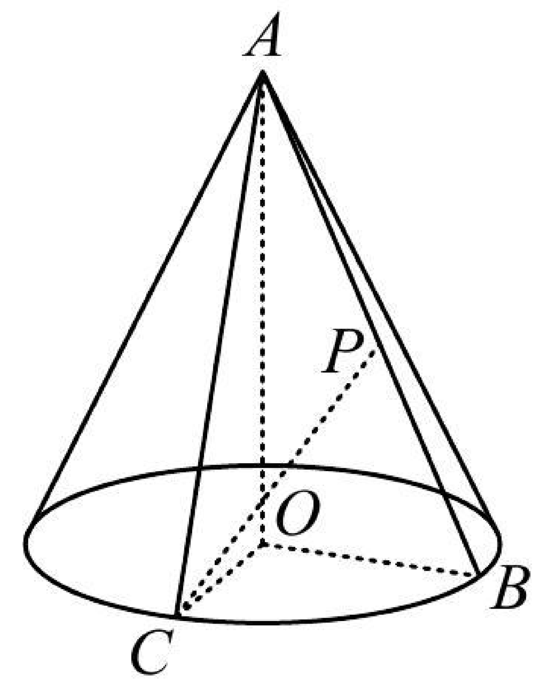


2.（2023·全国乙卷·★★★）已知 ΔABC 为等腰直角三角形，AB 为斜边，ΔABD 为等边三角形，若二面角 $C-AB-D$ 为 150°，则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{5}$　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　（D）$\dfrac{2}{5}$

3.（2022·浙江期中·★★★）如图，圆锥 AO 中，B，C 是圆 O 上的不同两点，若 $\angle OAB=30^{\circ}$，且二面角 $B-AO-C$ 为 60°，动点 P 在线段 AB 上，则 CP 与平面 AOB 所成角的正切值的最大值为（　　）

（A）2　（B）$\sqrt{3}$　（C）$\sqrt{2}$　（D）1



类型Ⅱ：压轴综合多选题

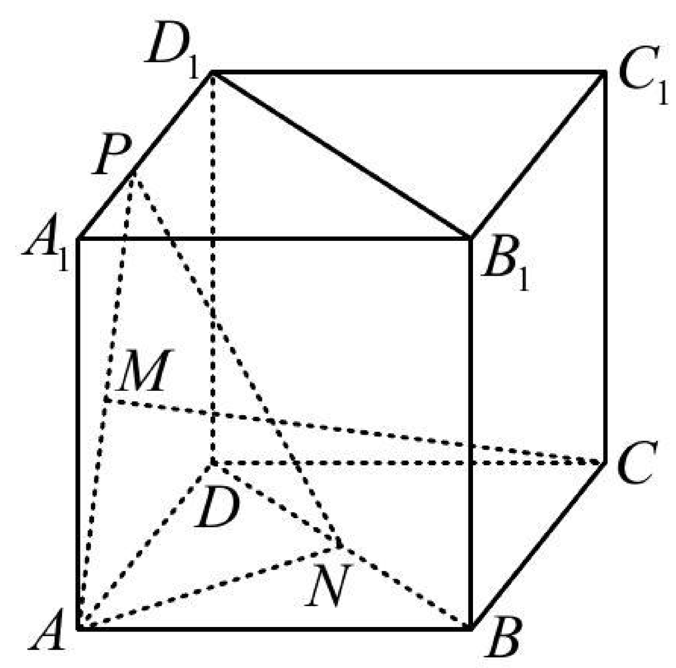
4．（2022 • 湖南模拟 • ★★★）（多选）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，N 为底面 $ABCD$ 的中心，P 为线段 A_1D_1 上的动点（不含端点），M 为线段 AP 的中点，则（　　）

（A）CM 与 PN 是异面直线

（B）$CM > PN$

（C）平面 $PAN\perp$ 平面 BDD_1B_1

（D）过 A，P，C 三点的正方体的截面一定是等腰梯形



5．（2022 • 山东模拟 • ★★★）（多选）在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，P 在底面 ABC 上的投影是 AC 中点 D，$DP=DC=1$，则下列结论中正确的是（　　）

（A）$PA=PB=PC$

（B）$\angle PAB$ 的取值范围为 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$

（C）若三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为 2π

（D）若 $AB=BC$，E 是棱 PC 上的一个动点，则 $DE+BE$ 的最小值是 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

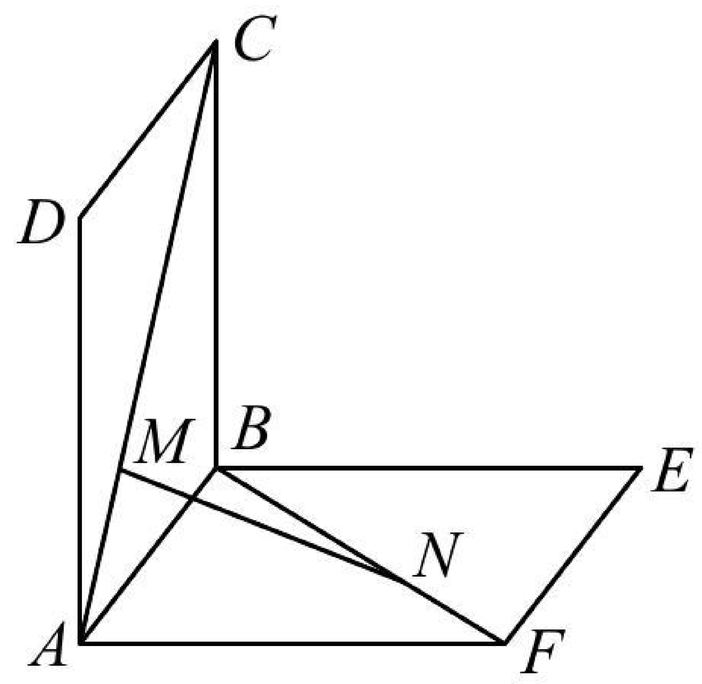
6．（2023 • 长沙雅礼中学模拟 • ★★★★）（多选）在如图所示的实验装置中，两个长方形框架 $ABCD$ 与 $ABEF$ 全等，且它们所在的平面互相垂直，$AB=1$，$BC=BE=2$，活动弹子 M，N 分别在长方形对角线 AC 和 BF 上移动，且 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{5})$，则下列说法正确的是（　　）

（A）$AB\perp MN$

（B）MN 的长的最小值为 $\sqrt{2}$

（C）当 MN 的长最小时，平面 MNA 与平面 MNB 所成夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$

（D）$V_{M-ANB}=\dfrac{a^2(2\sqrt{5}-2)}{15}$



7．（2023 •湖北统考 •★★★★）（多选）折纸是一种高雅的艺术活动，已知正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 2，现将 ΔACD 沿对角线 AC 旋转 180°，记旋转过程中点 D 的位置为点 P（不含起始位置和与 B 重合的情形），AC，AP，BC 的中点分别为 O，E，F，则（　　）

（A） $AC \perp BP$

（B） $PB+PD$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$

（C）旋转过程中，EF 与平面 BOP 所成角的正弦值的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

（D） ΔACD 旋转形成的几何体的体积是 $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

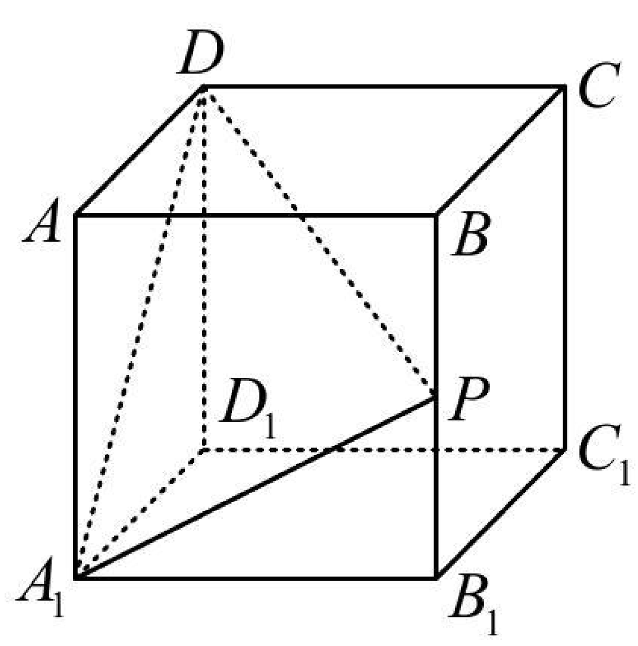
8．（2022 •第二次 T8 联考 •★★★★）（多选）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 的中点，Q 为正方形 BB_1C_1C 内一动点（含边界），则下列说法中正确的是（）

（A）若 D_1Q // 平面 A_1PD，则动点 Q 的轨迹是一条线段

（B）存在点 Q，使得 $D_1Q \perp$ 平面 A_1PD

（C）当且仅当点 Q 落在棱 CC_1 上某点处时，三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积最大

（D）若 $D_1Q=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则点 Q 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$



9．（2021·新高考Ⅰ卷·★★★★）（多选）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$， $\mu\in[0,1]$，则（　　）

（A）当 $\lambda=1$ 时， ΔAB_1P 的周长为定值

（B）当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

（C）当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

（D）当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P